

**Modelación espacial de contaminación Cv-19 en Bogotá**  
**JRToro, Ingeniería Mecánica, Uniandes**  
**mayo 8 2020**

**I. Modelo usado**

Este trabajo tan solo es un experimento computacional que debe ser revisado por expertos en temas de modelaje biológico y epidemiológico – nada de lo cual es el autor- para analizar su validez y utilidad en la coyuntura actual.

Aquí se pretende simular las evolución espacial de la contaminación en Bogotá siguiendo ecuaciones de “reacción-difusión” entre las tres variables: susceptibles, infectados y recuperados  $S, I, R$ . La “reacción”, es decir la interacción entre los agentes involucrados se toma del modelo clásico SIR. Sin embargo cada una de estas variables se ha cambiado por una distribución que no solo depende del tiempo sino que depende del espacio,  $S(\mathbf{x}, t), I(\mathbf{x}, t), R(\mathbf{x}, t)$ , con  $\mathbf{x}$  la posición en una región en el plano  $\Omega$ , que en este caso será la ciudad de Bogotá. El despliegue espacial se modela agregando un término característico de procesos difusivos  $\alpha \nabla^2(\cdot)$ . El término difusivo pretende remedar el movimiento de las personas, aun cuando por su naturaleza es un movimiento aleatorio sin direcciones preferenciales. Para simular movimientos direccionados como el transporte debería incluirse un término advectivo de la forma  $\mathbf{v} \cdot \nabla(\cdot)$  con  $\mathbf{v}$  una velocidad prescrita de las rutas y tráfico en la ciudad

Las ecuaciones  $SIR$  modificadas propuesta para este trabajo se tomaron de [1], sin embargo el uso de ecuaciones de reacción-difusión en modelos biológicos es bien desarrollada, ver por ejemplo [2] de fácil acceso digital

1. 
$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\beta SI}{N} + \alpha_S \nabla^2 I$$
2. 
$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I + \alpha_I \nabla^2 I$$
3. 
$$\frac{\partial R}{\partial t} = \gamma I + \alpha_R \nabla^2 R$$

- La condición de borde sobre la frontera de  $\Omega$  es una condición de aislamiento  $n \cdot \nabla(\cdot) = 0$  sobre los tres campos  $S, I, R$ .
- Las condiciones iniciales corresponden a la medición de contaminados en los primeros días de la infección. Esta será un dato siempre defectuoso por la dificultad de medir correctamente el número de infectados, particularmente cuando no hay suficiente atención a la evolución del virus en los primeros días. El momento del pico de infección será sensible a esta condición inicial.

Este es un conjunto de 3 ecuaciones diferenciales parciales acopladas, con una no linealidad correspondiente al termino reactivo y un término difusivo clásico. En este experimento las ecuaciones se han resuelto discreteando el tiempo de manera implícita y la dependencia espacial resuelta con elementos finitos triangulares usando el paquete

MATHEMATICA 11 (2020). El dominio espacial es discretizado en una malla 1129 elementos triangulares.

Los parámetros de difusión  $\alpha$  son problemáticos de asignar en este modelo puesto que no están presentes en el modelo SIR. Aquí se presentan simulaciones con dos valores extremos y se pueden observar las consecuencias en los resultados finales. Por analogía con otros procesos de difusión el valor que se asigne a estos parámetros será proporcional a la longitud de las incursiones aleatorias de los agentes y su velocidad, lo cual se puede asociar con la naturaleza de los confinamientos. Sin embargo, como ya se advirtió estos efectos difusivos NO simulan el movimiento direccionado, como lo es el transporte urbano.

## II. Bogotá

El modelo parte de una geometría de Bogotá basada en localidades, densidades de población constantes sobre localidades y datos iniciales de contaminación también constantes sobre localidades que después adoptan su propia dinámica.

Se usan únicamente las porciones pobladas de las localidades, basado en una cartografía y demografía muy doméstica. Algunas localidades se han fusionado: Santa Fé con Candelaria y Rafael Uribe con Antonio Nariño. La figura 1 muestra la simplificación del mapa de Bogotá y su discretización.

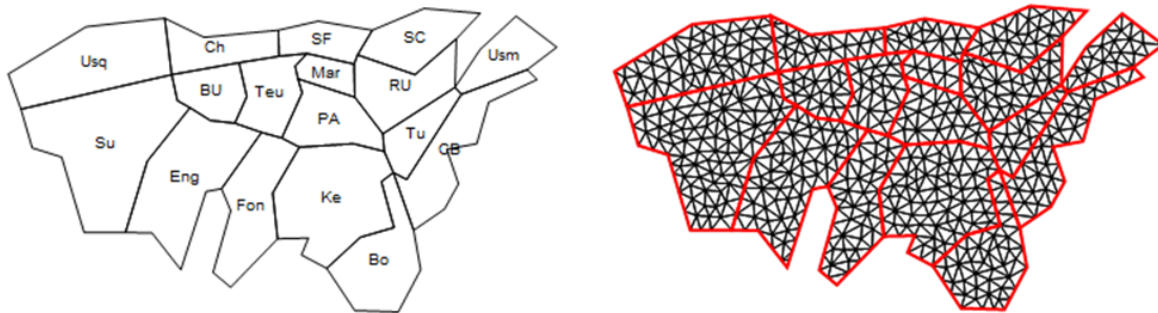


Figura 1

### III. Soluciones de prueba

Las soluciones de prueba se hicieron para los siguientes escenarios:

Infecciosidad:  $R_o = \frac{\beta}{\gamma}$ :

- 1.2 que corresponde a lo que las autoridades de salud afirman que es el caso de Bogotá.
- 1.8 que resultaría bastante problemática

Difusión:  $\frac{\alpha I}{\gamma}$ . Aquí simplemente se han ensayado dos valores que resulten extremos en cuanto a los resultados observados.  $\frac{\alpha I}{\gamma} = 0.01$  y  $1$ . Una relación de 1:100 en el factor de difusión puede interpretarse como una relación equivalente de la longitud de las incursiones los agentes.

Las soluciones se despliegan de dos formas:

- Curvas de porcentaje de contaminados por localidad lo cual se hace integrando numéricamente las densidades  $I(x, t)$  sobre cada localidad. Se ha tomado como condición inicial de contaminados el número de reportados el 15 de marzo.
- Curvas de nivel de  $I(x, t)$ , con densidad  $I$  medida en contaminados/manzana. La manzana se entiende como  $100m \times 100m = 10,000m^2 = 0.01km^2$ . Esta unidad de contaminados por manzana parece más fácil de asimilar que las poblaciones por  $km^2$ . Las curvas de nivel se muestran en animaciones mp4 que barren todo el ciclo de contaminación.

#### III.1 Resultados de prueba:

Porcentaje de contaminados: Las curvas de proporción de contaminados por localidad, figura 2 y 3 se despliegan para dos familias: Centro Sur y Norte Occidente que tienen comportamientos distintos. La figura 2 muestra el caso de alta difusión, es decir movilidad y figura 3 el caso de baja movilidad (aislamiento). En ambos casos, alta y baja movilidad, se ha tomado una misma condición inicial y una Infecciosidad de 1.2 (baja). La condición inicial de marzo 14 incluye varias localidades con cero contaminados.

En el caso de alta difusión, figura 2, es decir alta movilidad, todas las localidades se contaminan de forma casi simultánea, aun partiendo del hecho de que unas localidades no tenían contaminados en los primeros días, la alta difusión lleva rápidamente la infección a estos puntos. La ciudad se porta como un único objeto de la infección. Esto es análogo a fenómenos de transferencia de calor transiente con bajo número de Biot.

La figura 3, de muy baja movilidad, muestra un escalonamiento de la contaminación que puede extenderse por un periodo muy largo, lo cual debe ser un alivio para los sistemas de salud, pero inconveniente en el intento de reactivar la ciudad.

Un efecto interesante de las bajas difusiones respecto de las altas que tendría que explorarse con más cuidado es la reducción de hasta un 20% del pico de contaminados para ciertas localidades manteniendo parámetros de Infecciosidad iguales.

Dinámica de la contaminación: Los videos que se incluyen en este documento muestran la dinámica de la contaminación para cuatro situaciones:  $R_o = 1.2$  y  $R_o = 1.8$  con alta y baja difusión en cada caso. Los resultados agregados son la consecuencia de la dinámica exhibida en estas animaciones que corresponden a la solución numérica de las ecuaciones presentadas en el numeral I. En ellos se puede apreciar cómo se despliega de manera espacio-temporal la infección, partiendo de una semilla plantada en el noroccidente de la ciudad. Los videos tienen un rotulo en el extremo inferior izquierdo que indica el escenario y un contador de tiempo.

El factor  $R_o$  determina la velocidad y magnitud de la infección en términos agregados de la ciudad, sin embargo la difusión determina la manera como se despliega geográficamente dada una condición inicial, demografía y geometría.

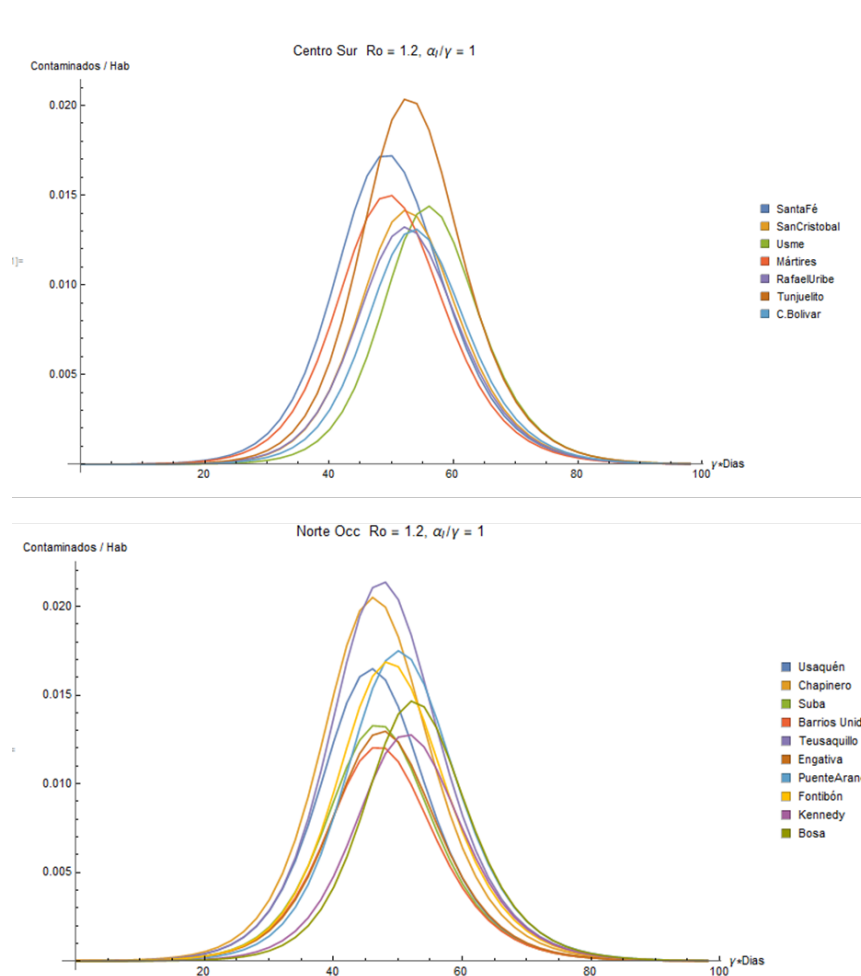


Figura 2

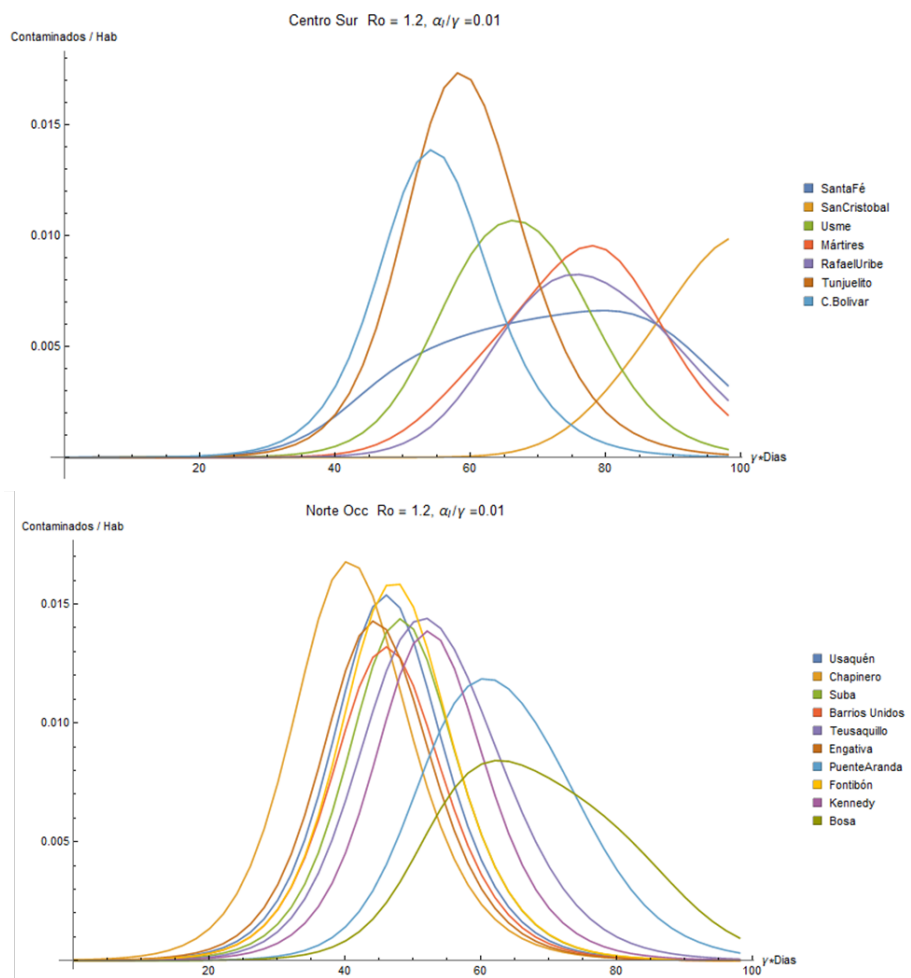


Figura 3

#### IV. Observaciones finales

El modelo se ha implementado aquí con dos limitaciones:

- Parámetros de Infeciosidad y difusión constante. El permitir que sean variables permitiría evaluar más precisamente lo que se ha llamado “aislamientos inteligentes”, mediante el uso de cordones de baja difusión que sería la forma de remedar el efecto de aislamiento por zonas.
- Involucrar términos advectivo que complican la solución numérica, pero permiten estudiar el efecto del transporte masivo en la difusión de la infección.

A parte de estas limitaciones técnicas hay una de más importancia que es la validez misma de esta aproximación mediante ecuaciones de reacción difusión para el problema que nos ocupa, lo cual se escapa completamente del conocimiento del autor.

Finalmente hay una pregunta de orden completamente práctico pero importante: hay algo que todavía se pueda hacer para direccionar la infección en Bogotá de la mejor manera o ya es demasiado tarde para cualquier acción: los datos de la dinámica de la infección y de las presiones de todo tipo ya se han jugado.

Agradezco al profesor Omar López por haberme llamado la atención sobre este problema y su relación con modelos computacionales de problemas mecánicos y a Juan Manuel Cordovez por ilustrarme sobre el tema de modelaje computacional de problemas biológicos, todo por teléfono.

1. De Rossis A., *Modelling of epidemics by lattice Boltzmann method*, Preprint Abril 2020., Manchester. Comunicado por Omar López. (El método LBM no se uso para la solución que se presenta aquí, pero la formulación de las ecuaciones y parámetros de calibración se tomaron de este articulo
2. Kuttler C. *Reaction Diffusion equations with applications*  
[http://www-m6.ma.tum.de/~kuttler/script\\_reaktdiff.pdf](http://www-m6.ma.tum.de/~kuttler/script_reaktdiff.pdf), Munich.